

Cinemática de Mecanismos

3. Análise de Posição e Deslocamento

Paulo Flores
J.C. Pimenta Claro



Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Guimarães 2007

ÍNDICE

3. Análise de Posição e Deslocamento.....	1
3.1. Definição	1
3.2. Deslocamento Absoluto	2
3.3. Deslocamento Relativo.....	3
3.4. Métodos de Análise de Posição e Deslocamento	6
3.5. Métodos Analíticos.....	9
3.6. Métodos Gráficos	16
3.7. Análise de Posição de Mecanismos Elementares.....	17

*The motions of men must be such as to suggest their
dignity or their baseness.*

Leonardo da Vinci

3. ANÁLISE DE POSIÇÃO E DESLOCAMENTO

3.1. DEFINIÇÃO

A posição refere-se ao local adquirido por um corpo, ou um ponto material, após este ter efectuado um dado deslocamento. O deslocamento, por sua vez, diz respeito à trajectória¹ contínua descrita por um corpo em movimento relativamente a um referencial. No caso de movimentos planos, a posição de um ponto de um corpo é definida pelas suas coordenadas cartesianas, ao passo que o deslocamento é definido por uma expressão que é função do tempo. A figura 3.1 mostra a posição e o deslocamento de um ponto de um corpo, em que as coordenadas x^P e y^P representam a posição do ponto P para o instante t_1 , enquanto que a função $d(t)$ representa o deslocamento ou trajectória do ponto P ao longo do tempo.

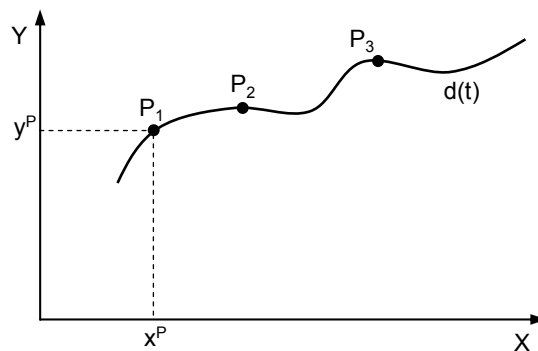


Figura 3.1 – Posição e deslocamento de um ponto.

¹ A trajectória pode definir-se como sendo a linha descrita por qualquer ponto de um corpo em movimento.

3.2. DESLOCAMENTO ABSOLUTO

O deslocamento absoluto de um ponto P pode ser definido pela variação do vector posição \mathbf{R}_{P_1} para \mathbf{R}_{P_2} , como se ilustra na figura 3.2.

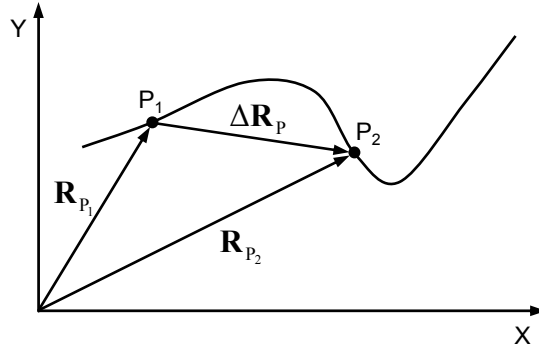


Figura 3.2 – Deslocamento absoluto de um ponto.

Em notação vectorial o deslocamento do ponto P pode ser expresso por,

$$\mathbf{R}_{P_2} = \mathbf{R}_{P_1} + \Delta \mathbf{R}_P \quad (3.1)$$

ou seja,

$$\Delta \mathbf{R}_P = \mathbf{R}_{P_2} - \mathbf{R}_{P_1} \quad (3.2)$$

Na figura 3.3 estão representadas duas posições de um corpo rígido definido pela barra que une os pontos P e Q . O deslocamento entre estas duas posições pode ser considerado como a translação de cada um dos pontos P e Q ou como a translação de um dos pontos, P ou Q , e a rotação θ do conjunto, mas nunca dos três parâmetros em simultâneo, uma vez que, para um corpo rígido, estas variáveis são dependentes. Com efeito, em notação vectorial tem-se que,

$$\Delta \mathbf{R}_P = \mathbf{R}_{P_2} - \mathbf{R}_{P_1} \quad (\text{translação}) \quad (3.3)$$

$$\Delta \mathbf{R}_Q = \mathbf{R}_{Q_2} - \mathbf{R}_{Q_1} \quad (\text{translação}) \quad (3.4)$$

$$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1 \quad (\text{rotação}) \quad (3.5)$$

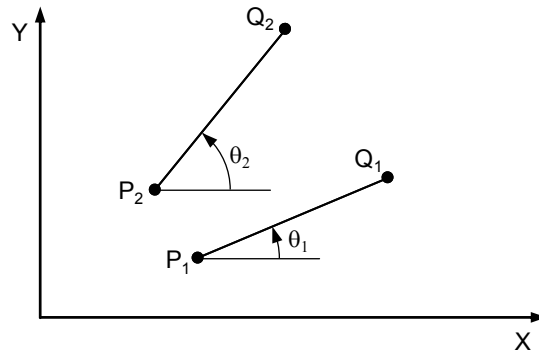


Figura 3.3 – Deslocamento absoluto de um corpo rígido.

3.3. DESLOCAMENTO RELATIVO

A figura 3.4 mostra a posição relativa² entre os pontos A e B , a qual, em termos matemáticos, pode escrita como,

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_{B/A} \quad (3.6)$$

ou seja,

$$\mathbf{R}_{B/A} = \mathbf{R}_B - \mathbf{R}_A \quad (3.7)$$

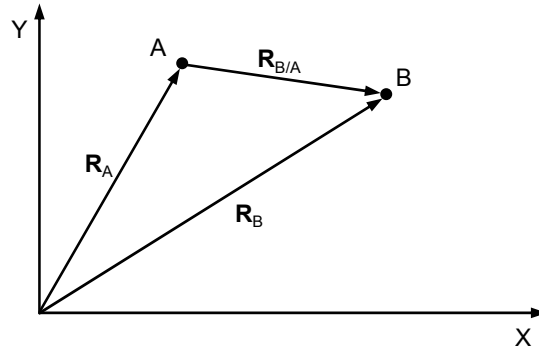


Figura 3.4 – Posição relativa entre dois pontos.

Quando dois pontos A e B pertencentes a um corpo rígido descrevem movimento de translação $\Delta\mathbf{R}_A$ e $\Delta\mathbf{R}_B$, respectivamente, então é nula a variação da posição do ponto B relativamente ao ponto A . Esta situação deve-se ao facto de ambos os pontos pertencerem ao mesmo corpo rígido. A figura 3.5 ilustra o deslocamento relativo de translação entre dois pontos de um mesmo corpo rígido.

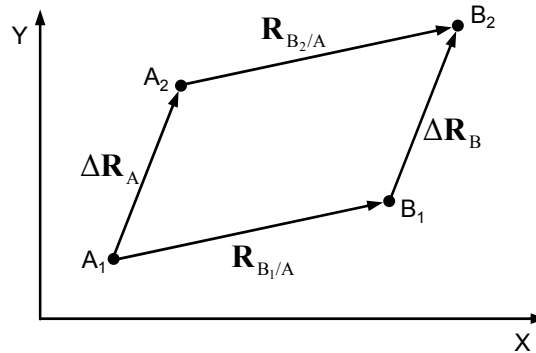


Figura 3.5 – Deslocamento relativo de translação entre dois pontos que pertencem ao mesmo corpo rígido.

Pelo que acima foi exposto observa-se que,

$$\Delta\mathbf{R}_A = \Delta\mathbf{R}_B \quad (3.8)$$

e também que,

$$\mathbf{R}_{B_1/A} = \mathbf{R}_{B_2/A} \quad (3.9)$$

² $\mathbf{R}_{B/A}$ deve ler-se como sendo a posição do ponto B em relação ao ponto A .

então,

$$\Delta \mathbf{R}_{B/A} = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

A equação (3.10) diz que é nula a variação da posição do ponto B relativamente ao ponto A , o que é de esperar que aconteça, uma vez que ambos os pontos fazem parte do mesmo corpo rígido. Deve notar-se que, contudo, no caso mais geral, é válida a seguinte relação geométrica,

$$\Delta \mathbf{R}_B = \Delta \mathbf{R}_A + \Delta \mathbf{R}_{B/A} \quad (3.11)$$

embora, na situação representada na figura 3.5 o termo $\Delta \mathbf{R}_{B/A}$ seja nulo.

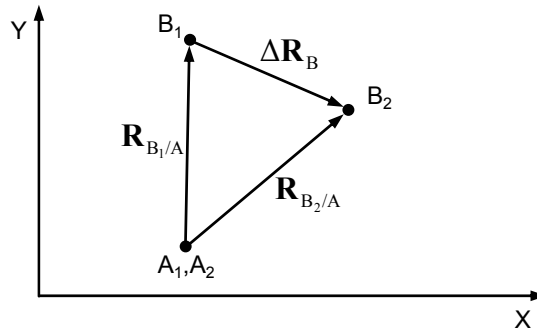


Figura 3.6 – Deslocamento relativo de rotação entre dois pontos que pertencem ao mesmo corpo rígido.

A figura 3.6. mostra o caso em que o ponto B descreve movimento de rotação em relação ao ponto A . À semelhança da situação anterior, ambos os pontos pertencem ao mesmo corpo rígido. Neste caso, verifica-se que,

$$\mathbf{R}_{B_1/A} = \mathbf{R}_{B_2/A} \quad (3.12)$$

e ainda que,

$$\Delta \mathbf{R}_B = \mathbf{R}_{B_2/A} - \mathbf{R}_{B_1/A} = \Delta \mathbf{R}_{B/A} \quad (3.13)$$

Nesta situação, observa-se também que,

$$\Delta \mathbf{R}_B = \Delta \mathbf{R}_A + \Delta \mathbf{R}_{B/A} \quad (3.14)$$

em que é nulo o termo $\Delta \mathbf{R}_A$.

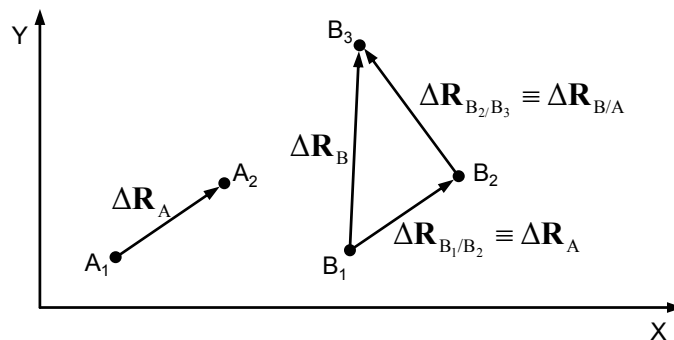


Figura 3.7 – Deslocamento relativo de translação e de rotação entre dois pontos que pertencem ao mesmo corpo rígido.

Na figura 3.7 representam-se as translações $A_1 \rightarrow A_2$ e $B_1 \rightarrow B_2$ seguidas de uma rotação $B_2 \rightarrow B_3$. Neste caso, coexistem os movimentos de translação e de rotação, verificando-se que,

$$\Delta \mathbf{R}_B = \Delta \mathbf{R}_A + \Delta \mathbf{R}_{B/A} \quad (3.15)$$

em que $\Delta \mathbf{R}_A$ e $\Delta \mathbf{R}_{B/A}$ representam, respectivamente, as componentes de translação e de rotação.

3.4. MÉTODOS DE ANÁLISE DE POSIÇÃO E DESLOCAMENTO

São três as principais metodologias que permitem analisar e estudar a posição e o deslocamento nos mecanismos, a saber: os métodos analíticos, os métodos gráficos e os métodos computacionais.

Os métodos analíticos baseiam-se, essencialmente, na dedução de expressões analíticas que traduzem a posição e configuração geométrica dos mecanismos. Para geometrias simples, e uma vez estabelecidas as equações dos deslocamentos dos vários corpos que constituem os mecanismos, é exequível a análise para um número elevado de posições intercalares, através da utilização de programas informáticos de cálculo automático, obtendo-se, deste modo, uma aproximação ao funcionamento do mecanismo em estudo. A utilização dos métodos analíticos torna-se imprescindível quando a análise de um mecanismo exige o estudo de várias fases do seu movimento. Estes métodos, para além de serem mais precisos e exactos que os métodos gráficos, apresentam ainda outra vantagem que se prende com o facto de que, uma vez conhecidas as expressões para a posição de um determinado elemento de um mecanismo, ser possível estudar a influência dos vários parâmetros no movimento global produzido, tais como, as dimensões das barras e o tipo accionamento. Este procedimento é particularmente relevante e útil na síntese de mecanismos. Os principais inconvenientes dos métodos analíticos têm a ver com a difícil detecção de eventuais erros e impossibilidade de visualização dos resultados obtidos em termos do movimento global do mecanismo.

Os métodos gráficos baseiam-se na interpretação geométrica do mecanismo em análise e na sua posterior resolução gráfica. Estes métodos, são bastante expeditos e suficientemente rigorosos para a maioria das aplicações correntes, mas apresentam como inconveniente o facto de serem válidos apenas e exclusivamente para a posição em que são traçados. Os métodos gráficos são usados com alguma frequência uma vez que possibilitam a observar a visualização do movimento do mecanismo em estudo. Estes métodos foram, primeiramente, utilizados na análise estática de sistemas mecânicos e, posteriormente, na cinemática de mecanismos. De facto, os primeiros estudos de mecanismos baseavam-se neste métodos e utilizavam as técnicas e equipamentos tradicionais, o que tornava os resultados algo imprecisos. Porém, o desenvolvimento de sistemas de desenho assistido por computador trouxe, não só um aumento no rigor do traçado, como também uma maior economia de tempo. Deve referir-se que uma das grandes vantagens dos sistemas de desenho assistido por computador consiste no facto de não necessitarem de um factor de escala, uma vez que o limite físico da área de desenho é, teoricamente, infinito. Por outro lado, com a utilização destes sistemas auxiliares de desenho minimizam-se os erros de execução e de leitura na análise gráfica. Com efeito, a grande utilidade dos métodos gráficos resume-se ao estudo de casos particulares, sendo, no entanto assaz trabalhosos e morosos na análise de mecanismos. Uma outra desvantagem da análise gráfica prende-se com a falta de exactidão. Por esta razão, neste trabalho, dá-se particular atenção aos métodos analíticos, não deixando, todavia, de apresentar os métodos gráficos sempre que se entender oportuno e pertinente.

A análise cinemática de mecanismos pode ainda ser levada a cabo com o auxílio de programas computacionais especialmente desenvolvidos para este propósito, os quais se baseiam em soluções obtidas por aproximações sucessivas. Uma vez que estas soluções resultam da aplicação de métodos numéricos, os resultados obtidos

são sempre aproximados, e cujo grau de aproximação e exactidão depende de vários factores, tais como o método de integração³, o intervalo de integração, entre outros. Intervalos de integração pequenos originam maior exactidão nos resultados, no entanto, prejudicam o tempo de processamento.

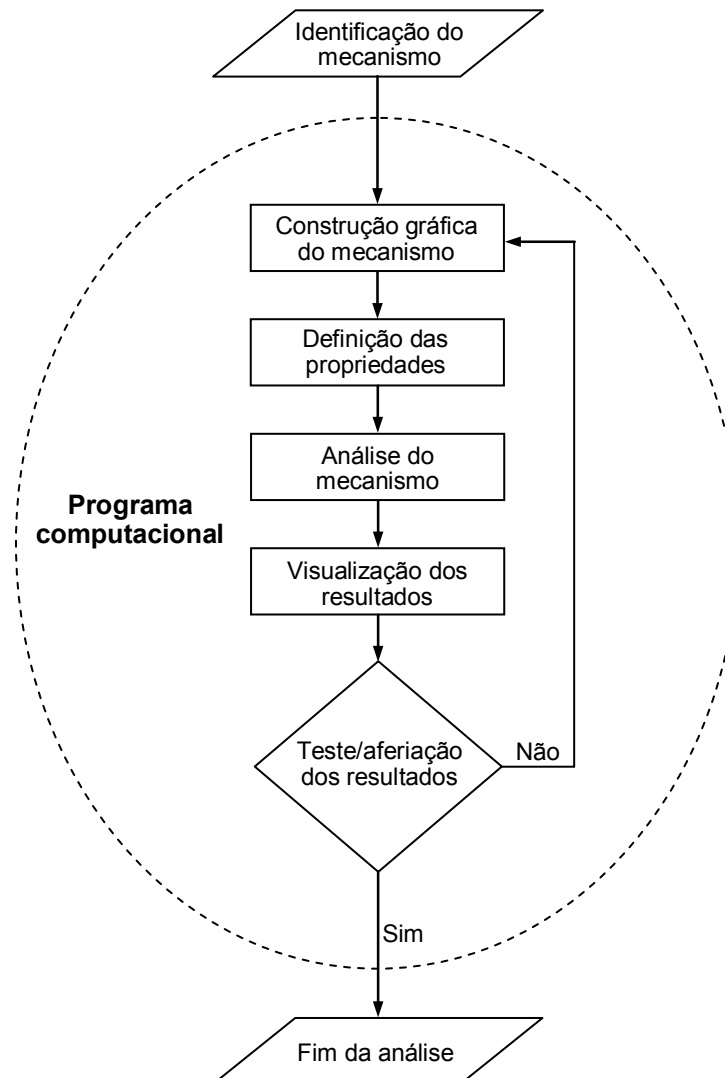


Figura 3.8 – Fluxograma básico que evidencia os vários passos a seguir nos diversos programas computacionais dedicados à análise de mecanismos.

Nos últimos anos, as aplicações informáticas especificamente dedicadas ao estudo cinemático e dinâmico de mecanismos são uma realidade no panorama industrial mundial, com especial destaque nos sectores da metalomecânica e da robótica. Estes programas permitem ao projectista simular (desenhar, avaliar e visualizar) o movimento de um dado mecanismo, sem necessidade de recorrer à construção de um protótipo físico. De facto, são inúmeras as vantagens inerentes à utilização destes programas, das quais se destacam a criação de modelos virtuais, a possibilidade de observar a funcionalidade e operabilidade dos componentes, a flexibilidade e

³ Os métodos numéricos de uso corrente são: o método de Euler mais simples e rápido e o método de Kutta-Merson mais exacto e mais lento.

facilidade de processamento de informação, a economia de materiais, de tempo e, consequentemente, de dinheiro, e o fácil conhecimento dos esforços envolvidos no movimento dos mecanismos tendo em vista o posterior dimensionamento de seus componentes.

Os passos a seguir na análise de mecanismos não diferem muito de programa para programa. Assim, desde a construção do modelo virtual até à visualização do movimento do mecanismo, podem resumir-se as seguintes etapas,

- Definir a geometria de cada um dos elementos que compõem o mecanismo;
- Caracterizar o tipo de ligação entre os vários elementos;
- Introduzir as características físicas dos componentes;
- Especificar os actuadores e o tipo de gerador de movimento;
- Analisar o mecanismo (cinemática e/ou dinâmica);
- Visualizar o movimento global do mecanismo.

A figura 3.8 apresenta os passos anteriormente apresentados sob a forma de um fluxograma. Obviamente que cada programa computacional dedicado à análise de mecanismos contém as suas particularidades e especificidades que os caracterizam e diferenciam.

3.5. MÉTODOS ANALÍTICOS

3.5.1. Método Algébrico

O método algébrico consiste, essencialmente, na dedução de expressões analíticas que traduzem a posição de um determinado corpo ou ponto de um corpo, em função da configuração geométrica do mecanismo e do tipo de accionamento.

Considere-se o mecanismo biela-manivela representado na figura 3.9, em relação ao qual se pretende deduzir uma equação que expresse, em cada instante, a posição do pistão ou corrediça, ou seja, a posição do ponto C . O ponto C representa o centro de massa ou centro de gravidade do pistão. No presente estudo, considera-se que a manivela é o órgão motor e roda em torno do ponto A com velocidade constante, ou seja, $\theta_2 = \omega_2 t$. Os comprimentos das barras 1, 2, e 3 são representados por r_1 , r_2 e r_3 , respectivamente. Note-se que r_1 é variável com o tempo, enquanto que r_2 e r_3 são constantes. As posições angulares das barras 1, 2 e 3 são, respectivamente, θ_1 , θ_2 e θ_3 , em que, no presente caso, θ_1 é nulo, ao passo que θ_2 e θ_3 variam com o tempo.

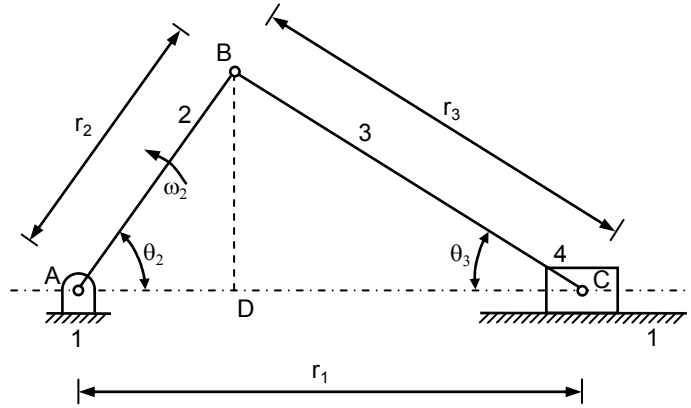


Figura 3.9 – Representação esquemática do mecanismo biela-manivela.

Atendendo à geometria da figura 3.9 pode escrever-se a seguinte expressão para a posição do ponto C ,

$$r_1 = AC = AD + DC \quad (3.16)$$

ou ainda,

$$r_1 = r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 \quad (3.17)$$

Uma vez que o mecanismo biela-manivela tem apenas um grau de liberdade, as variáveis θ_2 e θ_3 não são independentes, pelo que uma delas deve ser expressa em função da outra. Com efeito, ainda da figura 3.9 observa-se que,

$$BD = r_2 \sin \theta_2 = r_3 \sin \theta_3 \quad (3.18)$$

A equação (3.18) não é mais do que a lei dos senos aplicada ao triângulo ABC , a qual pode ser reescrita como,

$$\sin \theta_3 = \frac{r_2}{r_3} \sin \theta_2 \quad (3.19)$$

Substituindo a equação (3.19) na lei fundamental da trigonometria vem que,

$$\cos\theta_3 = \sqrt{1 - \frac{r_2^2}{r_3^2} \sin^2\theta_2} \quad (3.20)$$

Então, introduzindo, agora, a equação (3.20) em (3.17) obtém-se uma expressão que traduz a posição do ponto *C* em função da posição angular da manivela e dos comprimentos da manivela e da biela,

$$r_1 = r_2 \cos\theta_2 + r_3 \sqrt{1 - \frac{r_2^2}{r_3^2} \sin^2\theta_2} \quad (3.21)$$

Porém, como $\theta_2 = \omega_2 t$, a equação (3.21) pode ser reescrita como,

$$r_1 = r_2 \cos\omega_2 t + \sqrt{r_3^2 - r_2^2 \sin^2\omega_2 t} \quad (3.22)$$

Com efeito, a equação (3.22) permite calcular, em cada instante, a posição do pistão em função das características geométricas do mecanismo biela-manivela. Deste modo, as características cinemáticas da velocidade e aceleração do pistão podem facilmente ser obtidas por derivações sucessivas da equação (3.22) em ordem ao tempo.

No sentido de simplificar a obtenção destas derivadas pode efectuar-se uma simplificação matemática conducente a uma solução mais simples, perceptível e ainda com suficiente exactidão. Com efeito, nos mecanismos biela-manivela de uso corrente, o comprimento da biela é, em geral, cerca de três a quatro vezes superior ao da manivela, ou seja,

$$\frac{r_2}{r_3} = \frac{1}{4} \quad (3.23)$$

e, consequentemente,

$$\frac{r_2^2 \sin^2\omega_2 t}{r_3^2} \leq \frac{1}{16} \quad (3.24)$$

Por outro lado, da análise matemática sabe-se que qualquer expressão do tipo $\sqrt{1 - \varepsilon}$, pode ser desenvolvida numa série de potências do seguinte modo,

$$\sqrt{1 - \varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8} - \dots \quad (3.25)$$

Porém, para $\varepsilon = 1/16$, o terceiro termo é igual a $1/2048$, pelo que este termo e os seguintes podem ser desprezados, sendo usualmente aceitável o erro associado a esta simplificação. Com efeito, a equação (3.22) pode ser substituída por,

$$r_1 = r_2 \cos\omega_2 t + r_3 - \frac{r_2^2 \sin^2\omega_2 t}{2r_3} \quad (3.26)$$

O primeiro termo do segundo membro da equação (3.26) é *AD*, o segundo termo é *BC* e o terceiro termo é, aproximadamente, a diferença entre *BC* e *DB*, como se pode observar na figura 3.9.

3.5.2. Método da Notação Complexa

Este método consiste na substituição da cada corpo do mecanismo em análise por um vector posição equivalente, adicionando-os depois ao longo de uma cadeia cinemática fechada. A equação ou equações daí resultantes são, então, escritas em notação complexa. O estudo é, portanto, feito no espaço complexo. Na figura 3.10, o vector **R** representa um número complexo, o qual pode ser expresso por,

$$\mathbf{R} = r^x + ir^y \quad (3.27)$$

em que r^x e r^y representam, respectivamente, a parte real e a parte imaginária. A quantidade i representa a unidade imaginária tal que $i = \sqrt{-1}$.

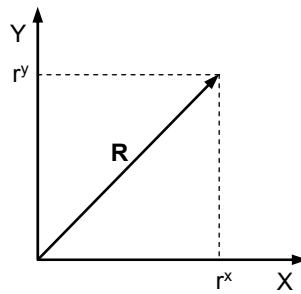


Figura 3.10 – Espaço complexo.

O módulo ou valor absoluto do vector **R** é dado por,

$$r = \sqrt{(r^x)^2 + (r^y)^2} \quad (3.28)$$

O vector **R** pode ser escrito em notação complexa e coordenadas polares como,

$$\mathbf{R} = r\cos\theta + ir\sin\theta \quad (3.29)$$

ou ainda,

$$\mathbf{R} = r(\cos\theta + isen\theta) = re^{i\theta} \quad (3.30)$$

Das séries numéricas de MacLaurin sabe-se que,

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \dots \quad (3.31)$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \quad (3.32)$$

$$isen\theta = i\theta - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \dots \quad (3.33)$$

Observe-se que a primeira série é igual à soma das segunda e terceira séries.

A figura 3.11 ilustra o mecanismo biela-manivela em que as respectivas barras estão representadas por vectores posição equivalentes, os quais formam uma cadeia cinemática fechada. Assim, somando estes vectores pode ser escrita a seguinte equação vectorial,

$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1 = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

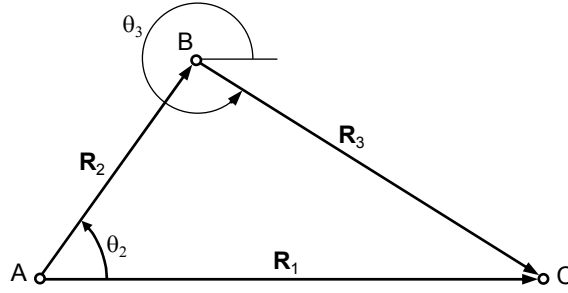


Figura 3.11 – Representação vectorial do mecanismo biela-manivela.

Em notação complexa a equação (3.34) pode ser reescrita como,

$$r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} - r_1 e^{i\theta_1} = 0 \quad (3.35)$$

em que, na presente situação r_2 , r_3 , θ_1 e θ_2 são parâmetros conhecidos à partida.

Pelas séries de MacLaurin, pode escrever-se,

$$r_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2) + r_3 (\cos\theta_3 + i \sin\theta_3) - r_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1) = 0 \quad (3.36)$$

Separando, agora, as partes real e imaginária tem-se, respectivamente,

$$r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 - r_1 \cos\theta_1 = 0 \quad (3.37)$$

$$r_2 \sin\theta_2 + r_3 \sin\theta_3 - r_1 \sin\theta_1 = 0 \quad (3.38)$$

Como $\cos\theta_1=1$ e $\sin\theta_1=0$, resolvendo em simultâneo as equações (3.37) e (3.38) em ordem a θ_3 e r_1 obtém-se,

$$\theta_3 = \arcsen\left(-\frac{r_2 \sin\theta_2}{r_3}\right) \quad (3.39)$$

$$r_1 = r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\left[\arcsen\left(-\frac{r_2 \sin\theta_2}{r_3}\right)\right] \quad (3.40)$$

Por outro lado, como,

$$\arcsen\left(-\frac{r_2 \sin\theta_2}{r_3}\right) = \arccos\sqrt{1 - \left(-\frac{r_2 \sin\theta_2}{r_3}\right)^2} \quad (3.41)$$

então, a equação (3.40) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$r_1 = r_2 \cos\theta_2 + \sqrt{r_3^2 - r_2^2 \sin^2\theta_2} \quad (3.42)$$

A equação (3.42) é, como seria de esperar, exactamente igual à equação (3.21) obtida pelo método algébrico, evidenciando, deste modo, a importância e utilidade da notação complexa.

3.5.3. Método da Notação Matricial

Neste método, tal como no método da notação complexa, cada um dos elementos que constitui mecanismo em análise é substituído por um vector posição equivalente de modo a obter-se uma cadeia cinemática fechada. À semelhança das anteriores,

nesta secção pretende-se obter expressões que traduzam a posição do pistão do mecanismo biela-manivela ilustrado na figura 3.12.

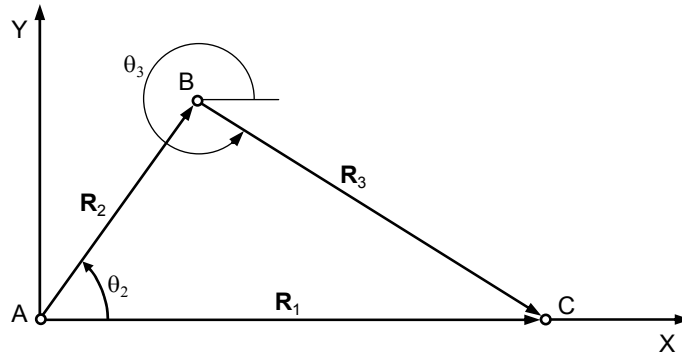


Figura 3.12 – Representação vectorial do mecanismo biela-manivela.

Uma vez estabelecida a cadeia cinemática do mecanismo biela-manivela, os vectores por ela formados devem ser projectados nas direcções X e Y , obtendo-se, respectivamente, as seguintes expressões,

$$r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 - r_1 = 0 \quad (3.43)$$

$$r_2 \sin \theta_2 - r_3 \sin \theta_3 = 0 \quad (3.44)$$

Na presente situação, admite-se que o órgão motor é a manivela, sendo por isso, conhecido o valor de θ_2 . Como os comprimentos das barras são também conhecidos *a priori*, as incógnitas das equações (3.43) e (3.44) são θ_3 e r_1 . Assim, resolvendo simultaneamente as equações (3.43) e (3.44) vem que,

$$\theta_3 = \arcsen \left(\frac{r_2 \sin \theta_2}{r_3} \right) \quad (3.45)$$

$$r_1 = r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \left[\arcsen \left(\frac{r_2 \sin \theta_2}{r_3} \right) \right] \quad (3.46)$$

Deve notar-se que as equações (3.45) e (3.46), são iguais às obtidas anteriormente pelos métodos algébrico e da notação complexa.

No presente exemplo, não é possível, nem necessário, escrever as equações (3.43) e (3.44) na forma matricial. No entanto, caso tal fosse possível, em termos gerais, a forma matricial pode ser escrita do seguinte modo,

$$\mathbf{A}x = c \quad (3.47)$$

Em que, a matriz \mathbf{A} contém os coeficientes do sistema, c contém os termos independentes e x representa o vector que contém as incógnitas. A equação (3.47) representa um sistema de equações lineares, cuja solução pode obter-se recorrendo, por exemplo, à regra de Cramer⁴. Assim, um sistema de equações de dimensão dois pode ser escrito como,

⁴ Para matrizes com menos de quatro equações é conveniente utilizar a regra de Cramer. Porém, para matrizes de dimensão superior, esta regra torna-se lenta na resolução de sistemas, pelo que se deve usar outro método, como, por exemplo, o método de eliminação de Gauss.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

cujas soluções são dadas por,

$$x_1 = \frac{c_1 a_{22} - c_2 a_{12}}{D} \quad (3.49)$$

$$x_2 = \frac{a_{11} c_2 - a_{21} c_1}{D} \quad (3.50)$$

em que o determinante D é calculado como,

$$D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad (3.51)$$

O método na notação matricial é particularmente útil no cálculo das velocidades e acelerações, uma vez que a matriz dos coeficientes é igual para os dois cálculos.

3.5.4. Método da Decomposição do Movimento

No espaço bidimensional, um corpo pode descrever três tipos de movimento, a saber: movimento de translação, movimento de rotação e movimento geral ou misto.

O movimento é de translação quando todos os pontos de um corpo descrevem trajetórias paralelas de tal modo que as linhas que unem dois quaisquer pontos do corpo permanecem sempre paralelas em relação às posições iniciais. A figura 3.13a ilustra o movimento plano de translação curvilínea.

O movimento é de rotação em torno de eixo quando todos os pontos descrevem trajetórias circulares em torno de uma recta designada eixo de rotação. Na figura 3.13b mostra-se o movimento de rotação.

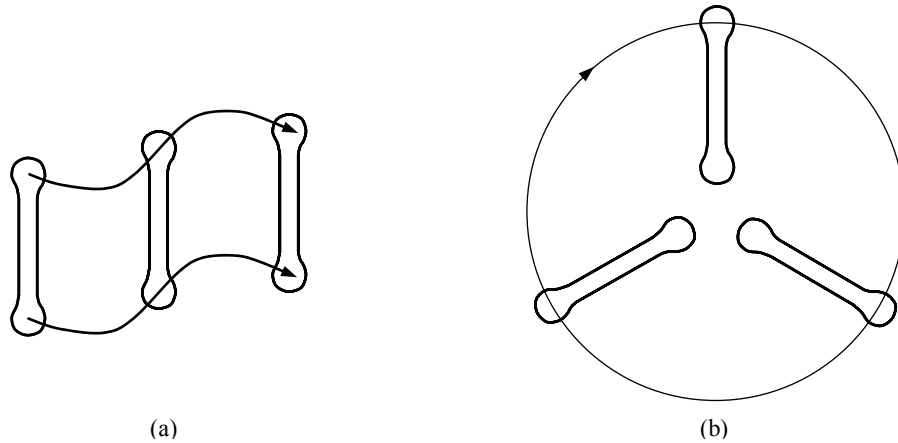


Figura 3.13 – (a) Movimento de translação; (b) Movimento de rotação.

O movimento é denominado geral ou misto quando existem em simultâneo as propriedades associadas aos movimentos de translação e de rotação. O movimento plano geral de um corpo pode sempre ser considerado como a combinação de um movimento de translação com um movimento de rotação. Esta decomposição do movimento geral traduz a lei de Chasles.

A figura 3.14 ilustra um exemplo de um corpo que descreve um movimento geral, o qual consiste numa barra cujos extremos se deslocam ao longo de uma guia

horizontal e outra vertical. Este movimento geral pode ser decomposto e substituído pela soma de uma translação na direcção horizontal e de uma rotação em torno de A , como ilustra a figura 3.14. Em alternativa, o movimento geral pode ser substituído pela soma de uma translação na direcção vertical e de uma rotação em torno do eixo que passo pelo ponto B .

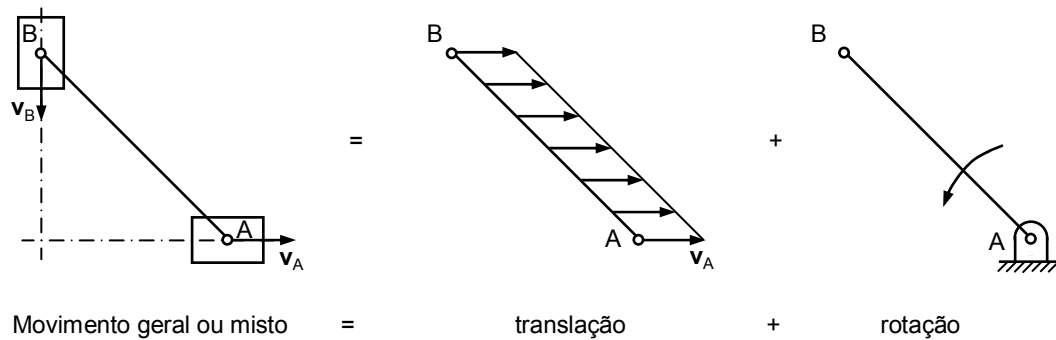


Figura 3.14 – Exemplo do movimento plano geral ou misto.

A maior parte dos mecanismos que se podem encontrar consta não de um, mas sim de vários elementos em movimento. Quando tais elementos se encontram articulados, isto é, constrangidos por juntas cinemáticas, o estudo pode ser feito a cada corpo separadamente sem, contudo, esquecer que os pontos comuns a vários elementos devem ter as mesmas características cinemáticas.

No caso particular do mecanismo biela-manivela, podem ser observados os três tipos de movimento plano anteriormente apresentados. Assim, a manivela descreve um movimento de rotação, o pistão efectua um movimento de translação rectilínea e a biela descreve movimento geral ou misto. Este movimento, pode ser facilmente estudado se for decomposto como a soma de uma translação e uma rotação.

Deve referir-se que o método da decomposição do movimento é particularmente útil e interessante no estudo cinemático de mecanismos planos, especialmente no que diz respeito ao cálculo das velocidades e das acelerações.

3.6. MÉTODOS GRÁFICOS

Os métodos gráficos consistem na representação geométrica do mecanismo em análise na posição, ou posições, de maior interesse para o seu estudo cinemático. A aplicação mais corrente e prática dos métodos gráficos é na determinação das velocidades e acelerações utilizando, nomeadamente, os métodos que se baseiam na construção gráfica dos polígonos de velocidades e acelerações. Estes dois métodos têm como base a resolução gráfica de equações vectoriais.

Em seguida é apresentada, a título de exemplo, uma aplicação prática do cálculo gráfico na análise da posição do mecanismo biela-manivela ilustrado na figura 3.15a. O problema relativo à análise de posição consiste na determinação dos valores de todas as variáveis que caracterizam a configuração geométrica do mecanismo, sendo conhecidos os comprimentos das barras e os valores das variáveis independentes, as quais são escolhidas para representar os graus de liberdade do mecanismo. No presente caso, admite-se que a corredeira é o órgão motor, sendo, por isso, conhecida à partida a posição do ponto C , \mathbf{R}_1 . A questão que se coloca é a de saber qual o valor dos ângulos θ_2 e θ_3 , isto é, quais as direcções da manivela e da biela, representadas pelos vectores \mathbf{R}_2 , \mathbf{R}_3 , \mathbf{R}'_2 e \mathbf{R}'_3 . Assim, a equação vectorial que representa este caso pode ser escrita como,

$$\mathbf{R}_1^{\text{vv}} = \mathbf{R}_2^{\text{vo}} + \mathbf{R}_3^{\text{vo}} \quad (3.52)$$

Esta equação vectorial tem duas soluções, que estão representadas graficamente na figura 3.15b, e em relação às quais correspondem diferentes configurações do mecanismo, isto é, há duas maneiras possíveis de associar a manivela e a biela para uma mesma posição do pistão ou ponto C , sendo ambas válidas.

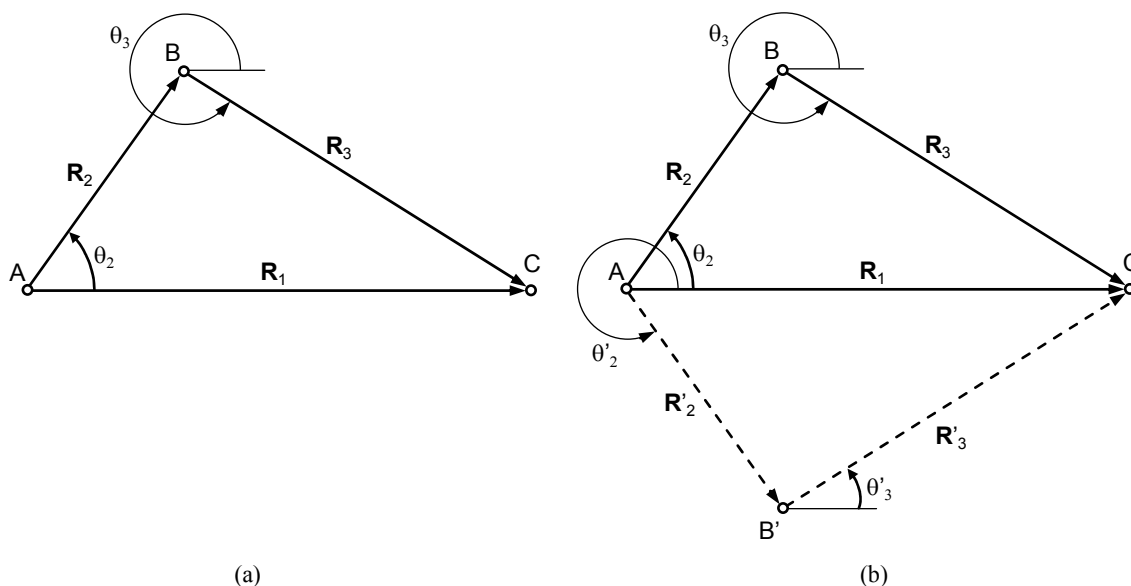


Figura 3.15 – Análise gráfica do mecanismo biela-manivela.

3.7. ANÁLISE DE POSIÇÃO DE MECANISMOS ELEMENTARES

3.7.1. Mecanismo de Quatro Barras

A figura 3.16 ilustra um mecanismo de quatro barras em relação ao qual se pretende efectuar a análise de posição dos seus elementos. Ainda na mesma figura estão representados os vectores que formam a cadeia cinemática equivalente.

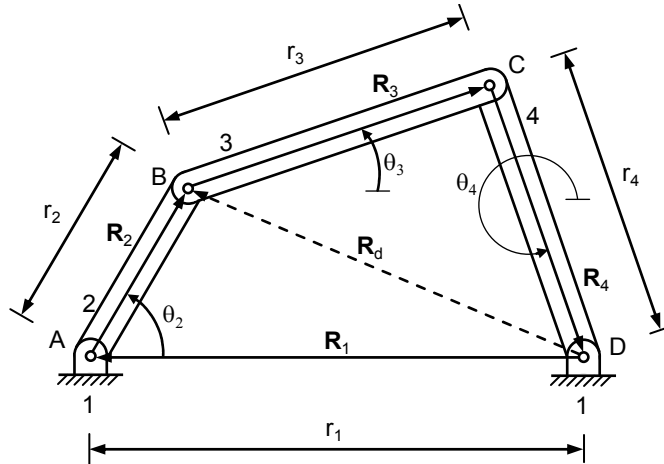


Figura 3.16 – Mecanismo de quatro barras.

A cadeia cinemática relativa ao mecanismo de quatro barras pode ser expressa pela seguinte equação vectorial,

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_4 = \mathbf{0} \quad (3.53)$$

ou ainda em notação complexa,

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} + r_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (3.54)$$

Utilizando a fórmula de Euler e separando as partes real e imaginária, a equação (3.54) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 + r_4 \cos\theta_4 = 0 \quad (3.55)$$

$$r_1 \sin\theta_1 + r_2 \sin\theta_2 + r_3 \sin\theta_3 + r_4 \sin\theta_4 = 0 \quad (3.56)$$

Na análise de posição do mecanismo de quatro barras representado na figura 3.16, os comprimentos das barras r_1 , r_2 , r_3 e r_4 são conhecidos, consistindo o problema em determinar os valores dos ângulos θ_3 e θ_4 , sendo dado o valor de θ_2 relativo à posição angular da manivela que é considerada como sendo o elemento motor. Este caso corresponde à solução de equações vectoriais em que as direcções de dois vectores diferentes são desconhecidas, a que correspondem duas soluções distintas e que estão ilustradas na figura 3.17.

Em alternativa à resolução gráfica apresentada, podem usar-se as equações (3.55) e (3.56), as quais constituem um sistema de duas equações a duas incógnitas, θ_3 e θ_4 . Este sistema é, contudo, transcendente não havendo, por isso, solução analítica, pelo que é necessário recorrer a métodos numéricos iterativos para obter as soluções, ou soluções suficientemente próximas.

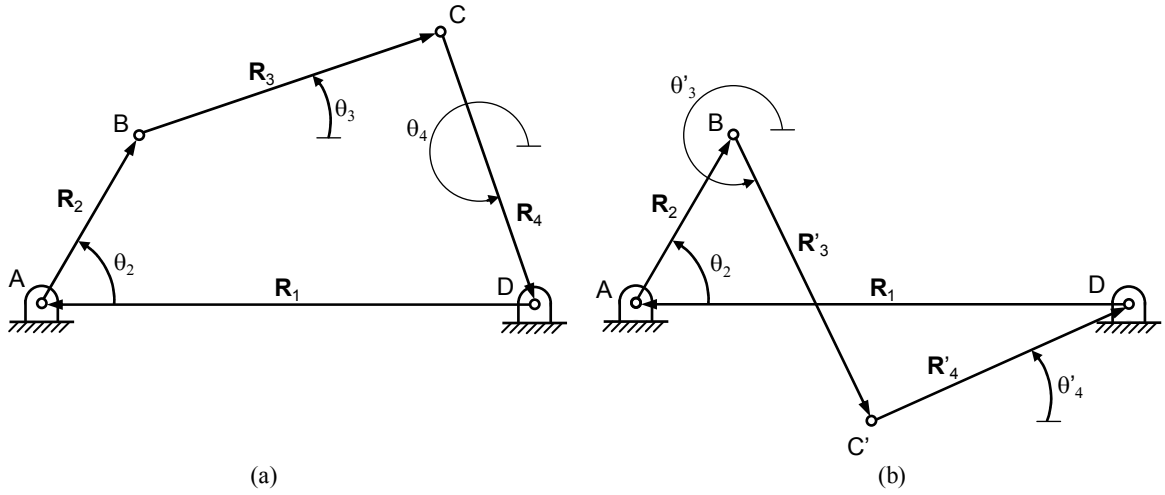


Figura 3.17 – Análise gráfica do mecanismo de quatro barras.

Em seguida é apresentada uma metodologia alternativa que conduz à obtenção dos valores de θ_3 e θ_4 . Assim, considere-se, por simplicidade e comodidade, a existência de um vector auxiliar, \mathbf{R}_d , que representa a diagonal principal do mecanismo de quatro barras, o qual une o ponto D ao ponto B , como ilustra a figura 3.16. Este vector auxiliar pode ser expresso por,

$$\mathbf{R}_d = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \quad (3.57)$$

ou, na forma polar complexa,

$$r_d e^{i\theta_d} = r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} \quad (3.58)$$

ou ainda,

$$r_d \cos \theta_d = r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2 \quad (3.59)$$

$$r_d \sin \theta_d = r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2 \quad (3.60)$$

Atendendo a que $\theta_1 = 180^\circ$, as equações (3.59) e (3.60) podem ser simplificadas da seguinte forma,

$$r_d \cos \theta_d = -r_1 + r_2 \cos \theta_2 \quad (3.61)$$

$$r_d \sin \theta_d = r_2 \sin \theta_2 \quad (3.62)$$

Elevando ao quadrado ambas equações (3.61) e (3.62) e somando-as, membro a membro, resulta que,

$$r_d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta_2 \quad (3.63)$$

Por outro lado, da equação (3.62) vem directamente que,

$$\theta_d = \arcsen \left(\frac{r_2}{r_d} \sin \theta_2 \right) \quad (3.64)$$

Deve referir-se que as equações (3.63) e (3.64) traduzem, respectivamente, a aplicação das leis dos cosenos e dos senos ao triângulo ABD .

O vector \mathbf{R}_d pode também ser expresso como,

$$\mathbf{R}_d = \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_4 \quad (3.65)$$

ou seja,

$$r_d e^{i\theta_d} = r_3 e^{i\theta_3} + r_4 e^{i\theta_4} \quad (3.66)$$

Dividindo a equação (3.66) por $e^{i\theta_3}$ vem que,

$$r_d e^{i(\theta_d - \theta_3)} = r_3 + r_4 e^{i(\theta_4 - \theta_3)} \quad (3.67)$$

Separando as partes real e imaginária e rearranjando os termos resulta em,

$$r_d \cos(\theta_d - \theta_3) = r_3 \cos(\theta_d - \theta_3) - r_4 \sin(\theta_d - \theta_3) \quad (3.68)$$

$$r_d \sin(\theta_d - \theta_3) = r_4 \sin(\theta_d - \theta_3) \quad (3.69)$$

Elevando ao quadrado ambas as equações e adicionando o resultado vem que,

$$r_d^2 = r_3^2 + r_4^2 - 2r_3 r_d \cos(\theta_d - \theta_3) \quad (3.70)$$

Resolvendo a equação (3.70) em ordem a θ_3 resulta,

$$\theta_3 = \theta_d \mp \arccos \frac{r_d^2 + r_3^2 - r_4^2}{2r_d r_3} \quad (3.71)$$

Procedendo de modo análogo, o valor do ângulo θ_4 é dado por,

$$\theta_4 = \theta_d \pm \arccos \frac{r_d^2 + r_4^2 - r_3^2}{2r_d r_4} \quad (3.72)$$

Com efeito, as equações (3.71) e (3.72) permitem calcular as posições angulares das barras 3 e 4 do mecanismo de quatro barras.

3.7.2. Mecanismo de Corrediça

Na figura 3.18a está representado um mecanismo de quatro barras em que existe uma corrediça entre as barras 3 e 4. Este mecanismo é, por isso, chamado mecanismo de corrediça. Na verdade trata-se de um mecanismo do tipo biela-manivela em que a manivela está fixa, ao passo que a barra anteriormente fixa pode rodar. Este tipo de mecanismo foi muito utilizado em motores de combustão interna nos primórdios da indústria aeroespacial, sendo conhecidos como motores rotativos porque os cilindros rodam em relação à manivela que está fixa. Este mecanismo é também um mecanismo de retorno rápido.

A figura 3.18b ilustra o sistema equivalente ao mecanismo de corrediça em que cada barra foi substituída pelo respectivo vector posição.

Da análise geométrica da figura 3.18b pode escrever-se a seguinte equação vectorial,

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_4 = \mathbf{0} \quad (3.73)$$

ou ainda,

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} - r_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (3.74)$$

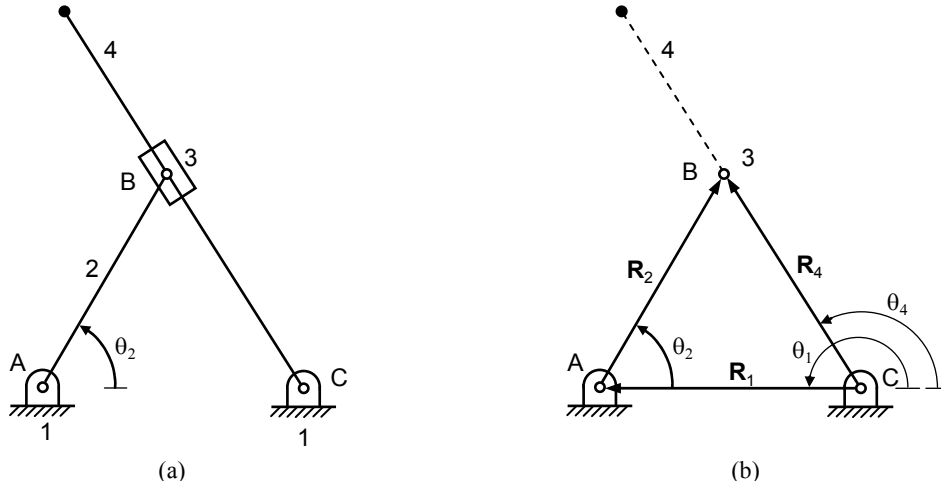


Figura 3.18 – (a) Mecanismo de corredeira; (b) Representação vectorial equivalente.

Utilizando a fórmula de Euler e separando as partes real e imaginária vem que,

$$r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2 - r_4 \cos \theta_4 = 0 \quad (3.75)$$

$$r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2 - r_4 \sin \theta_4 = 0 \quad (3.76)$$

Admitindo que a barra 2 é o órgão motor, o valor de θ_2 é, por isso, conhecido à partida. Uma vez que os comprimentos das barras 1 e 2 são também conhecidos, as incógnitas das equações (3.75) e (3.76) são r_4 e θ_4 .

Assim, o valor de θ_4 pode facilmente ser obtido dividindo a equação (3.76) pela equação (3.75), resultando em,

$$\theta_4 = \arctg \frac{r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2}{r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2} \quad (3.77)$$

Como, na presente situação o valor de θ_1 é igual a 180° , a equação (3.77) pode ser simplificada do seguinte modo,

$$\theta_4 = \arctg \frac{r_2 \sin \theta_2}{r_2 \cos \theta_2 - r_1} \quad (3.78)$$

Substituindo, agora, o valor de θ_4 dado pela equação (3.78) na equação (3.75), e resolvendo esta em ordem a r_4 vem que,

$$r_4 = \frac{r_2 \sin \theta_2 - r_1}{\cos \left(\arctg \frac{r_2 \sin \theta_2}{r_2 \cos \theta_2 - r_1} \right)} \quad (3.79)$$

3.7.3. Mecanismo Biela-Manivela com Excentricidade

A figura 3.19 ilustra um mecanismo do tipo biela-manivela, no qual existe uma excentricidade entre o eixo de rotação da manivela e o eixo que define a direcção de translação da corredeira. Ainda na mesma figura, as barras estão substituídas pelos respectivos vectores posição equivalentes formando uma cadeia cinemática fechada. Uma particularidade deste mecanismo é a diferença de tempo entre os movimentos de avanço e de recuo, sendo, por isso, usado como mecanismo de retorno rápido.

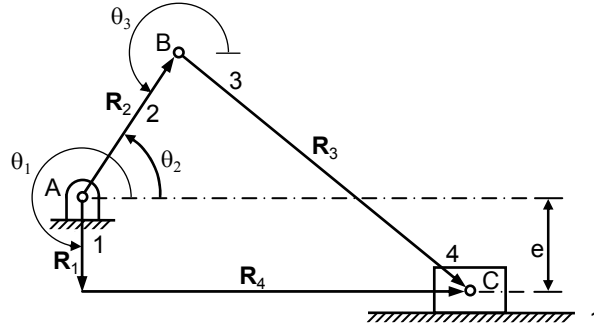


Figura 3.19 – Mecanismo biela-manivela com excentricidade.

Analisando a geometria da figura 3.19 é válida a seguinte equação vectorial,

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3 = \mathbf{0} \quad (3.80)$$

ou, na forma polar complexa,

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_4 e^{i\theta_4} - r_2 e^{i\theta_2} - r_3 e^{i\theta_3} = 0 \quad (3.81)$$

Utilizando a equação de Euler e separando as partes real e imaginária, a equação (3.81) resulta em,

$$r_1 \cos\theta_1 + r_4 \cos\theta_4 - r_2 \cos\theta_2 - r_3 \cos\theta_3 = 0 \quad (3.82)$$

$$r_1 \sin\theta_1 + r_4 \sin\theta_4 - r_2 \sin\theta_2 - r_3 \sin\theta_3 = 0 \quad (3.83)$$

Atendendo a que $\theta_1=270^\circ$ e $\theta_4=0^\circ$, das equações (3.82) e (3.83) vem que,

$$r_4 - r_2 \cos\theta_2 - r_3 \cos\theta_3 = 0 \quad (3.84)$$

$$-r_1 - r_2 \sin\theta_2 - r_3 \sin\theta_3 = 0 \quad (3.85)$$

Por outro lado, como a manivela é o elemento motor, o valor de θ_2 é conhecido *a priori*, pelo que as equações (3.84) e (3.85) devem ser resolvidas em ordem às incógnitas θ_3 e r_4 , ou seja,

$$\theta_3 = \arcsen\left(-\frac{r_1 + r_2 \sin\theta_2}{r_3}\right) \quad (3.86)$$

$$r_4 = r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\left[\arcsen\left(-\frac{r_1 + r_2 \sin\theta_2}{r_3}\right)\right] \quad (3.87)$$

3.7.4. Mecanismo Biela-Manivela Invertido

A figura 3.20 mostra um mecanismo do tipo biela-manivela invertido. Este tipo de inversão do mecanismo biela-manivela é utilizado em bombas manuais usadas para retirar água de poços. No sentido de definir uma cadeia cinemática fechada, consideram-se os vectores \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 , \mathbf{R}_3 e \mathbf{R}_4 , tal como se ilustra na figura 3.20, em que \mathbf{R}_3 tem a mesma direcção da velocidade da corredeira e \mathbf{R}_4 é perpendicular a esta direcção. Assim, pode escrever-se que,

$$\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 = \mathbf{0} \quad (3.88)$$

ou na forma polar complexa,

$$r_2 e^{i\theta_2} - r_1 e^{i\theta_1} - r_3 e^{i\theta_3} - r_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (3.89)$$

e em que,

$$\theta_4 = \theta_3 - 90 \quad (3.90)$$

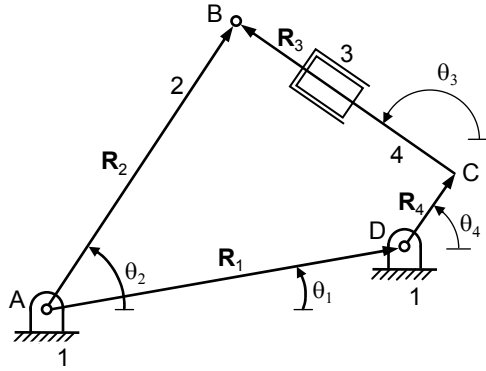


Figura 3.20 – Mecanismo biela-manivela invertido.

Utilizando a equação de Euler separando as partes real e imaginária, da equação (3.89) resulta que,

$$r_2 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1 - r_3 \cos \theta_3 - r_4 \cos \theta_4 = 0 \quad (3.91)$$

$$r_2 \sin \theta_2 - r_1 \sin \theta_1 - r_3 \sin \theta_3 - r_4 \sin \theta_4 = 0 \quad (3.92)$$

Na análise de posição deste mecanismo, as equações (3.90)-(3.92) devem ser verificadas em cada instante. Neste caso, o vector \mathbf{R}_1 permanece constante, quer em módulo, quer em direcção, os vectores \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_4 são constantes em módulo e o vector \mathbf{R}_3 varia, tanto em módulo, como em direcção. Pode, portanto, observar-se que os valores de r_1 , r_2 , r_4 , θ_1 e θ_4 são conhecidos à partida.

Com efeito, se o mecanismo for accionado pela manivela, isto é, θ_2 é dado, então as equações (3.90)-(3.92) devem ser resolvidas para θ_3 e r_3 . Por outro lado, quando θ_3 for conhecido, então as equações referidas devem ser resolvidas para θ_2 e r_3 em função de θ_3 . Finalmente, se r_3 for dado, as equações (3.90)-(3.92) têm de ser resolvidas com o intuito de calcular θ_2 e θ_3 . Na figura 3.21 estão representadas as possíveis soluções quando θ_3 e r_3 são dados.

Com efeito, admitindo que a manivela é o órgão motor, ou seja, θ_2 é dado, então substituindo a equação (3.90) nas equações (3.91) e (3.92) e isolando os termos que contêm θ_3 no segundo membro vem que,

$$r_2 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1 = r_3 \cos \theta_3 - r_4 \sin \theta_3 \quad (3.93)$$

$$r_2 \sin \theta_2 - r_1 \sin \theta_1 = r_3 \sin \theta_3 - r_4 \cos \theta_3 \quad (3.94)$$

Elevando ambas as equações ao quadrado, somando-as e resolvendo em ordem a r_3 resulta que,

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - r_4^2 - 2r_1r_2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)} \quad (3.95)$$

Deve notar-se que, caso o argumento da raiz quadrada seja negativo, r_3 tem solução complexa, o que significa que para o valor de θ_2 especificado não é possível associar as barras com os comprimentos dados.

Substituindo, agora, os valores de $\cos\theta_3$ e $\sin\theta_3$ na equação (3.93) pelas relações trigonométricas de semi-ângulos, vem que,

$$a(1+t^2) - r_3(1-t^2) - r_4(2t) = 0 \quad (3.96)$$

em que,

$$a = r_2 \cos\theta_2 - r_1 \cos\theta_1 \quad (3.97)$$

e,

$$t = \tan \frac{\theta_3}{2} \quad (3.98)$$

Rearranjando a equação (3.96) obtém-se,

$$(a + r_3)t^2 - 2r_4t + (a - r_3) = 0 \quad (3.99)$$

Resolvendo esta equação em ordem a t vem que,

$$t = \frac{r_4 + \beta \sqrt{r_4^2 - a^2 + r_3^2}}{a + r_3} \quad (3.100)$$

onde $\beta = \pm 1$. Para determinar o valor correcto do parâmetro β , deve, em cada instante, ser calculado θ_3 usando a seguinte expressão,

$$\theta_3 = 2 \arctg(t) \quad (3.101)$$

De seguida deve substituir-se o valor de θ_3 na equação (3.94), em que o valor correcto de θ_3 corresponde ao valor que verifica a igualdade de equação (3.94).

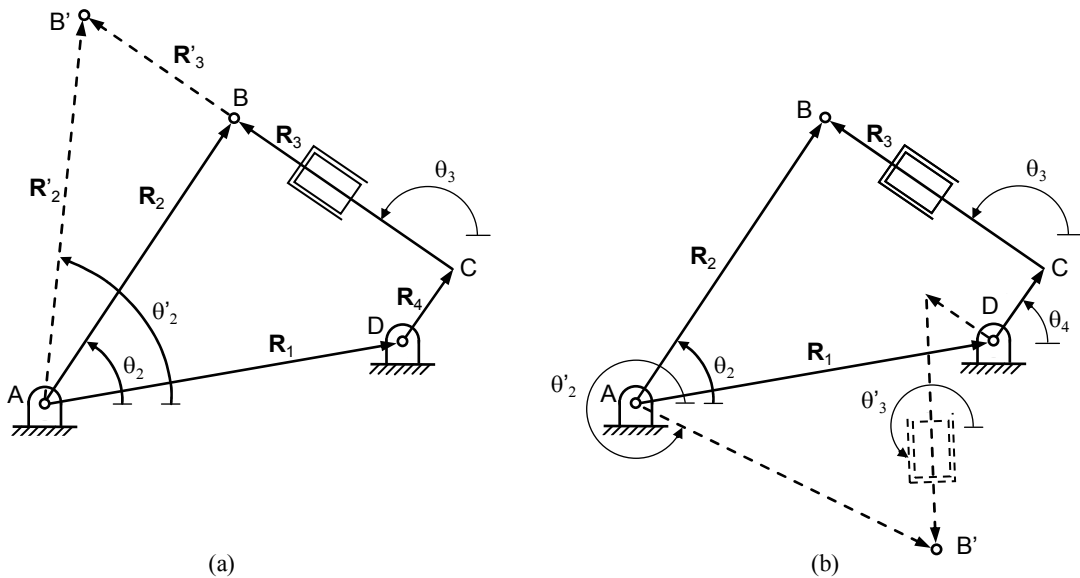


Figura 3.21 – (a) Duas possíveis soluções para a associação das barras sendo conhecido o valor de θ_3 ; (b) Duas possíveis soluções para a associação das barras sendo dado r_3 .